6 Užduotis

Išspręskite lygtį:

$$\frac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{2x+1}=\frac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{x+3}.$$

Sprendimas

Dėmesio, provokacija!

Skaitikliai vienodi, tai gal lygtį suprastinti, pašalinant tas šaknis, ir taškas?

Ne! Reikia išspręsti apibrėžimo srities nelygybę:

$$2x^2-5x-3\geq 0;$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm 7}{4};$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)\geq 0;$$

$$x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=3.$$

$$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[3;+\infty).$$

Dabar sprendžiame tokią lygtį:

$$\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{x+3};$$

$$x+3=2x+1;$$

$$x=2.$$

Ne, netinka, $x = 2$ nepatenka į apibrėžimo sritį.

Tai ką, sprendinių nėra? Yra! Taigi ties apibrėžimo srities ribomis $x=-\frac{1}{2}$ ir $x=3$ skaitikliai lygūs nuliui, todėl tai ir yra lygties sprendiniai.

Ot, ir ne! Reikėjo stropiau užrašyti apibrėžimo srities nelygybes. Sistemoje turėjo būti tokios nelygybės:

$$\begin{cases}2x^2-5x-3\geq 0\\ 2x+1\neq 0\\ x+3\neq 0\end{cases}.$$

Taigi $x=-\frac{1}{2}$ netinka kaip sprendinys, nes vardiklis virsta nuliu!

Atsakymas: 3.

• • •

INTERVALŲ METODAS

Užduotis **22**

Išspręskite nelygybę:

$$\frac{(2+sin3x)(x^2-1)}{ln(x^2+2)\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{1+tg100^\circ}}\geq 0\,.$$

Sprendimas

Oho, kokia baisi nelygybė!

Tai jau čia intervalų metodas tikriausiai netiks?

Tiks, tiks! Tai „popierinis tigras“...

Nagrinėjame daugiklius:

$(2 + sin3x)$ – teigiamas su bet kuriomis x reikšmėmis, nes $-1 \leq sin3x \leq 1$. Daugiklį metame lauk...

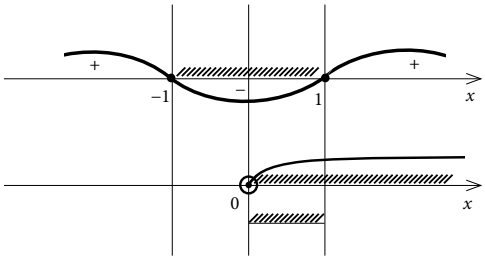
$(x^2-1)=(x-1)\cdot(x+1)$ – tinkami daugikliai.

$\ln(x^2 + 2)$ – teigiamas su bet kuriomis x reikšmėmis. Matote? Daugiklį pašaliname iš nelygybės.

$\sqrt{x}$ – daugiklis yra neneigiamas, bet būtina nurodyti sąlygą $x > 0$. Daugiklį iš nelygybės pašaliname, bet sąlygą įrašysime į nelygybių sistemą, kurią sudarysime iš duotosios nelygybės ir šios sąlygos.

$\sqrt[3]{1+tg100^\circ}$ – tai skaičius; tai neigiamas skaičius, nes $tg100°$ yra neigiamas, „labai neigiamas“, moduliu žymiai didesnis už vienetą. Galėtumėte tai įrodyti ar bent parodyti? Daugiklį pašaliname iš nelygybės ir pakeičiame nelygybės ženklą priešingu. Lieka tik tiek:

$$\begin{cases}(x-1)(x+1)\leq 0\\ x>0\end{cases};$$



Atsakymas: $x \in (0; 1]$.

• • •

10 *Užduotis*

Išspręskite nelygybę:

$$\left(4^x - 7\cdot 2^x + 12\right)\cdot\sqrt{3^{x+1} - 5} \le 0.$$

(Panašus uždavinys buvo pateiktas 2012 metais stojusiems į Maskvos valstybinį universitetą.)

Sprendimas

Pasikartokime: kvadratinė šaknis yra „neneigiamas skaičius iš neneigiamo skaičiaus“. Nelabai tikslu, bet labai įsimintina.

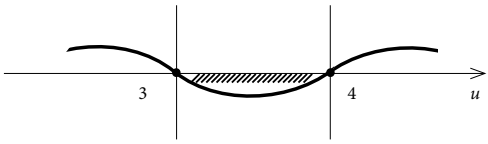
Taigi nelygybė bus teisinga, jei:

$$\begin{cases} 3^{x+1} - 5 \ge 0 \\ 4^x - 7\cdot 2^x + 12 \le 0 \end{cases}.$$

Pirmiausia intervalų metodu išspręskime antrąją sistemos nelygybę – kvadratinę nelygybę $u = 2^x$ atžvilgiu.

$$u_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2};$$

$$u_1 = 3;\ u_2 = 4.$$



Dabar sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} 3^{x+1} \ge 5 \\ 3 \le 2^x \le 4 \end{cases}.$$

Prireikė tokios formulės: $c = b^{\log_b c}$.

$$\begin{cases} 3^{x+1} \ge 3^{\log_3 5} \\ 2^{\log_2 3} \le 2^x \le 2^2 \end{cases};\qquad \begin{cases} x + 1 \ge \log_3 5 \\ \log_2 3 \le x \le 2 \end{cases};\qquad \begin{cases} x \ge \log_3 5 - 1 \\ \log_2 3 \le x \le 2 \end{cases}.$$

Dabar reikia išsiaiškinti, kas daugiau: $\left(\log_3 5 - 1\right)$ ar $\log_2 3$?

Kadangi $\log_3 5 < 2$ $\left(\text{nes}\ \log_3 9 = 2\right)$, tai $\log_3 5 - 1 < 1$, o $\log_2 3 > 1$ $\left(\text{nes}\ \log_2 2 = 1\right)$.

Atsakymas: $\left[\log_2 3;\ 2\right]$.

• • •

5 Užduotis

Lifte – šeši žmonės. Liftas kyla į viršų ir gali sustoti kiekviename iš keturių aukštų.

Keliais būdais žmonės gali pasiskirstyti išlipdami iš lifto? Mus domina tik išlipančių žmonių skaičius, bet ne kurie konkrečiai žmonės išlipa.

Sprendimas

Gal jie visi išlips antrame aukšte (pirmame iš tų keturių, į kuriuos kyla) ? Gal du žmonės išlips trečiame aukšte, o likusieji – ketvirtame?

Panašu, kad variantų yra daug...

Pritaikykime „skirtukų ir žvaigždučių“ schemą.

I II III IV

$* \mid \quad \mid ** \mid ***$

Matote tokį variantą: vienas žmogus išlips pirmame aukšte, du – trečiame, trys – ketvirtame.

O dabar pažiūrėkite į tokį variantą: du žmonės išlips antrame aukšte, keturi – trečiame aukšte.

I II III IV

$\mid ** \mid **** \mid$

Grandinėlėje yra trys skirtukai (keturiems aukštams atskirti) ir šešios žvaigždutės (šeši žmonės). Visais galimais būdais ((3 + 6)! būdų) keisdami vietomis skirtukus ir žvaigždutes, gausime visas galimas schemas (grandinėles su tais devyniais simboliais.

Bet išlipimo variantų yra gerokai mažiau! Juk nei dviejų skirtukų, nei dviejų žvaigždučių sukeitimas vietomis išlipimo varianto nepakeičia.

Įvertinę tai, gauname išlipimo variantų skaičių V:

$$V = \frac{(3+6)!}{3!\cdot 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 84 .$$

Atkreipkite dėmesį į tai, kaip suprastinome 9! ir 6!

Atsakymas: 84.

• • •

22 *Užduotis*

Pajūrio viešbutis sezono metu padidino nakvynės kainas. Sezonui pasibaigus viešbučio direktorius liepė:

– Reklamoje parašykite: „Kiek procentų kainas buvome padidinę, tiek procentų kainas dabar sumažiname.“

– Nedarykite taip. – pasakė buhalterė. – Jei taip padarysime, nakvynė mūsų viešbutyje kainuos 60 eurų, o prieš sezoną kainavo 64 eurus. Patirsime nuostolių.

Kiek procentų nakvynės kainos buvo padidintos sezono metu?

Sprendimas

Tarkime, kad kainos buvo padidintos p procentų. Sezono metu nakvynė kainavo

$$64+\frac{64\cdot p}{100}\text{ eurų.}$$

Sudarome lygtį žinodami, kiek nakvynė direktoriaus sprendimu turėjo kainuoti po sezono:

$$\left(64+\frac{64\cdot p}{100}\right)-\frac{\left(64+\frac{64\cdot p}{100}\right)\cdot p}{100}=60;$$

$$(64\cdot 100+64\cdot p)\cdot(100-p)=60\cdot 100^2;$$

$$64p^2=64\cdot 100^2-60\cdot 100^2;$$

$$p=\sqrt{\frac{100^2(64-60)}{64}}=\frac{100\cdot 2}{8}=25\ \%.$$

Atsakymas: 25 %.

• • •

Užduotis **78**

Nubraižykite grafiką:

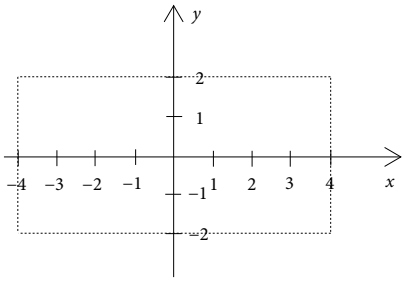
$$x^2 + 4y^2 = 16 .$$

Sprendimas

Moksleivis neprivalo žinoti, kokios tai kreivės lygtis, bet moksleiviui pravartu išmokti **pjūvių metodą** – procedūrą tirti įvairiausius grafikus.

Skaičiuojame mintinai: jei $x = 0$, tai $y = -2$, $y_2 = 2$; jei $y = 0$, tai $x_1 = -4$, $x_2 = 4$.

Koordinačių sistemoje turime keturis taškus:



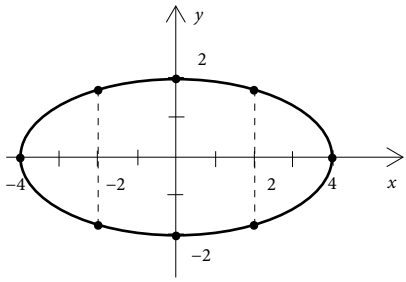
Kas toliau? Bandome grafiką „pjauti“ vertikalia tiese, pavyzdžiui, $x = 5$: $4y^2 = -9$; realiųjų sprendinių nėra. Tai reiškia, kad tiesė $x = 5$ grafiko niekur nekerta (nes jo ten nėra...).

Bematant įsitikiname, kad grafiko nėra niekur už grafike pažymėto stačiakampio ribų. Pavyzdžiui, jei $y = -3$, tai $x^2 = -20$ – realiųjų sprendinių nėra.

Kaip sujungti tuos keturis taškus? O gal kreivė jų visų net nesujungia?

„Pjaustykime“ toliau: jei, pavyzdžiui, $x = 2$ arba $x = -2$, tai $y_1 = -\sqrt{3}$, $y_2 = \sqrt{3}$.

Turime dar keturis simetriškai išdėstytus taškus. Aštuonių taškų visiškai pakanka, kad galėtume nubraižyti **elipsę**:



• • •